WISKUNDE VI, cursus '91–'92, Tentamen
donderdag 18 juni 1992, duur: drie uur.

1.[1] De onderdelen (i) en (ii) zijn onafhankelijk van elkaar.
(i)[4] Bepaal de aard van de singulariteit (opheffbare of essentiële singulariteit of pool) in de punten $z = 0$ en $z = \pi$ van de funktie

$$f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z \sin z}.$$

(ii)[5] Bepaal met behulp van de Laurentreeks van e^{z^2} voor $n \in \mathbb{Z}$ de integraal

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos 2\phi} \cos(\sin 2\phi - n\phi)\, d\phi.$$

2.[1] Betrek bij de twee onderdelen van deze opgave, die overigens onafhankelijk van elkaar kunnen worden gemaakt, contourintegralen waarbij de contour bestaat uit twee halve cirkels in het bovenhalfvlak om $z = 0$ en met stralen ε en R, $0 < \varepsilon < R < \infty$, en de twee lijnstukken $[-R, -\varepsilon]$ en $[\varepsilon, R]$ op de x-as.
(i)[5] Bepaal de integraal $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$. Geef ook de afschattingen op de halve cirkels.
(ii)[4] Bepaal de integraal $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ via berekening van de hoofdwaarde-integraal PV $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz$. Afschattingen worden nu niet gevraagd.

3.[1] Stel $\Delta\Psi(x, y, z) = 0$ en voer in de orthogonale coördinatentransformatie

$$x = \rho(u, v)\cos\varphi, \quad y = \rho(u, v)\sin\varphi, \quad z = uv,$$

waarbij $\rho(u, v) = \sqrt{(1-u^2)(1+v^2)}$, $-1 < u < 1$, $0 < v < \infty$ en $0 \le \varphi \le 2\pi$. Schrijf $\Omega(u, v, \varphi) = \Psi(\rho(u, v)\cos\varphi, \rho(u, v)\sin\varphi, uv)$. Dan geldt (dit hoeft niet te worden nagerekend):

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u}(1-u^2)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}(1+v^2)\frac{\partial}{\partial v} + \left(\frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{1+v^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\Omega(u, v, \varphi) = 0.$$

Stel $\Omega(u, v, \varphi) = U(u)V(v)\Phi(\varphi)$.
(i)[2] Toon aan: Φ voldoet aan de vergelijking $\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0$, waarbij $\mu \ge 0$ en $\mu = m^2, m = 0, 1, 2, \ldots$

(Z.O.Z.)